Prirodno-matematički fakultet

Društvo matematičara i fizičara Crne Gore

OLIMPIJADA ZNANJA 2017

Rješenja zadataka iz MATEMATIKE

za VIII razred osnovne škole

1. Za dati četvorocifreni broj X označimo s Y broj dobijen tako što od X devetostruku vrijednost trocifrenog broja dobijenog od prve tri cifre broja X, zatim oduzmemo devetostruku vrijednost dvocifrenog broja dobijenog od prve dvije cifre broja X i na kraju devetostruku vrijednost jednocifrenog broja jednakog prvoj cifri broja X. Ako znamo da su cifre broja X prosti brojevi i da je proizvod cifara broja X pet puta veći od Y, odrediti moguće vrijednosti broja X.

   Rješenje: Neka je $X = \overline{abcd} = 1000a + 100b + 10c + d$. Lako se vidi da je $Y = a + b + c + d$. Kako je X pet puta veći od Y, to vrijedi

$$5(a + b + c + d) = abcd \quad \Longrightarrow \quad 5|abcd. \tag{1}$$

   Kako su svi brojevi a, b, c, d prosti i $5|abcd$, slijedi da je bar jedan od brojeva a, b, c, d jednak 5. Radi određenosti, neka je $a = 5$. Odavde i iz (1), dobijamo

$$5 + b + c + d = bcd.$$

   Odavde dalje slijedi da bar jedan od brojeva b, c, d mora biti jednak dva jer je inače lijeva strana paran broj, a desna neparan. Neka je $b = 2$. Dakle,

$$7 + c + d = 2cd$$

   odakle slijedi da c ili d moraju biti jednaki 2. Uvrštavajući $c = 2$, zaključujemo da je $d = 3$. Moguće vrijednosti broja X dobijaju se permutacijama brojeva $2, 2, 3, 5$.

2. Na šahovsku ploču 10x10 kod koje je donje lijevo polje bijelo postavljeno je 50 žetona tako da nikoja dva nisu na istom polju. Pri tom 25 žetona zauzima donju lijevu četvrtinu ploče, a

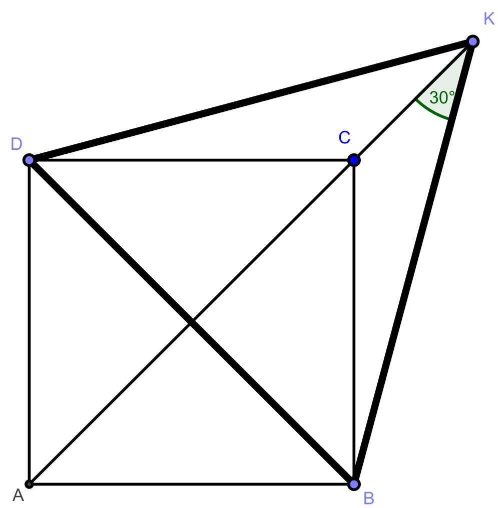
preostalih 25 gornju desnu četvrtinu. Neka su X, Y, Z redom tri uzastopna polja (horizontalno, vertikalno ili dijagonalno). Ako se dva žetona nalaze na poljima X i Y i ako je polje Z slobodno, žeton s polja X može se premjestiti na polje Z preskočiši žeton na polju Y.

Može li se žetom koji se nalazi na bijelom polju u jednom trenutku naći na crnom polju? Može li se, konačnim nizom takvih poteza, premjestiti svih 50 žetona na donju polovinu ploče?

Rješenje: Vidimo da je broj bijelih polja na donjoj lijevoj četvrtini ploče 13, dok je crnih polja 12. Isto je i na gornjoj desnoj polovini ploče (tj. broj žetona koji su na crnim poljima je manji od broja žetona koji su na bijelim poljima). Pri svakom potezu, žeton ne mijenja boju polja na kom se nalazi tako da je zahtjev iz zadatka neispunjiv.

3. Dat je kvadrat $ABCD$. Na pravoj koja sadrži tačke A i C izabrana je tačka K takva da je $AC = BK$. Odrediti ugao $\angle BKC$.

Rješenje: Primijetimo da je prava $p(A, C)$ simetrala duži BD, pa je $DK = BK = AC = BD$. Dobijamo da je trougao BDK jednakostranični. Odavde je $\angle BKD = 60°$, a kako je $p(AC)$ simetrala tog ugla, to je $\angle BKC = 30\circ$



4. Odrediti sva nenegativna cjelobrojna rješenja x i y jednačine

$$x + 5y = 4\sqrt{xy} + 1.$$

Rješenje: Jednačinu možemo prepisati u obliku

$$(\sqrt{x} - 2\sqrt{y})^2 + y = 1.$$

Kako $\sqrt{xy}$ mora biti cjelobrojno, to je i $(\sqrt{x} - 2\sqrt{y})^2$ cjelobrojno pa kako su x i y nenegativni to su jedine mogućnosti

$$\sqrt{x} - 2\sqrt{y} = 0 \ \text{ i } \ y = 1 \ \text{ ili } \ \sqrt{x} - 2\sqrt{y} = 1 \ \text{ i } \ y = 0.$$

Odavde lako vidimo da su jedina rješenja

$$(x, y) = (4, 1) \ \text{ i } \ (x, y) = (1, 0).$$

Vrijeme rada: 180 minuta.
Svaki zadatak se boduje od 0 do 25 poena.
Rješenja zadataka detaljno obrazložiti.