Prirodno-matematički fakultet

Društvo matematičara i fizičara Crne Gore

OLIMPIJADA ZNANJA 2017

Rješenja zadataka iz MATEMATIKE

za VII razred osnovne škole

1. Data su četiri cijela broja. Biraju su parovi tih brojeva (njih 6) i računaju njihovi zbirovi. Četiri najveća zbira iznose 24, 27, 36 i 48. Odrediti ostala dva zbira i date brojeve.

   Rješenje: Označimo tražene brojeve sa a, b, c i d. Bez smanjenja opštosti, pretpostavimo da je $a \leq b \leq c \leq d$. Očigledno, dva najveća zbira su $c + d = 48$ i $b + d = 36$. Odavde je $c - b = 12$, odnosno $c = b + 12$. Što se preostalih zbirova tiče, imamo dvije mogućnosti:
   1) $b + c = 27$ i $a + d = 24$. Uvrštavajući $c = b + 12$ dobijamo $2b + 12 = 27$, odnosno $b = \frac{15}{2}$, što je nemoguće jer je b cio broj. Dakle, ovaj slučaj odbacujemo.
   2) $b + c = 24$ i $a + d = 27$. Uvrštavajući $c = b + 12$ dobijamo $2b + 12 = 24$, odnosno $b = 6$, $c = 18$, $d = 30$, $a = -3$. Preostala dva zbira su $a + b = 3$ i $a + c = 15$.

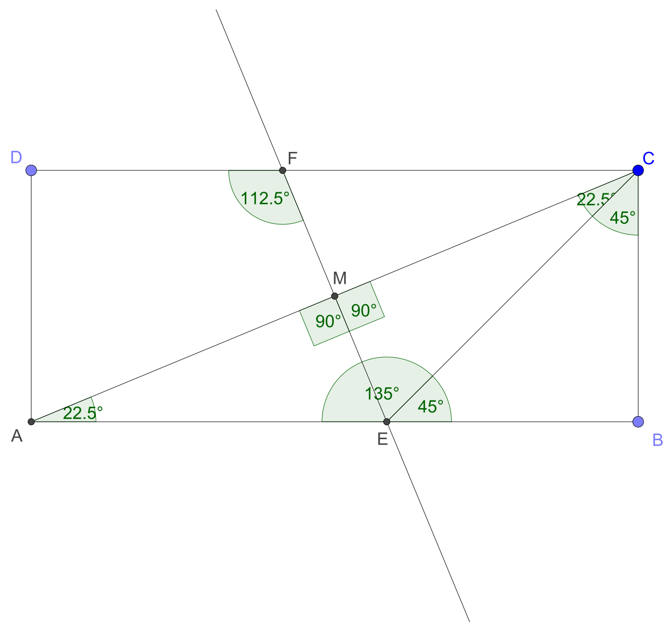
2. Na šahovsku ploču 10x10 kod koje je donje lijevo polje bijelo postavljeno je 50 žetona tako da nikoja dva nisu na istom polju. Pri tom 25 žetona zauzima donju lijevu četvrtinu ploče, a preostalih 25 gornju desnu četvrtinu. Neka su X, Y, Z redom tri uzastopna polja (horizontalno, vertikalno ili dijagonalno). Ako se dva žetona nalaze na poljima X i Y i ako je polje Z slobodno, žeton s polja X može se premjestiti na polje Z preskočiši žeton na polju Y.

   Može li se žetom koji se nalazi na bijelom polju u jednom trenutku naći na crnom polju? Može li se, konačnim nizom takvih poteza, premjestiti svih 50 žetona na donju polovinu ploče?

   Rješenje: Vidimo da je broj bijelih polja na donjoj lijevoj četvrtini ploče 13, dok je crnih polja 12. Isto je i na gornjoj desnoj polovini ploče (tj. broj žetona koji su na crnim poljima je manji od broja žetona koji su na bijelim poljima). Pri svakom potezu, žeton ne mijenja boju polja na kom se nalazi tako da je zahtjev iz zadatka neispunjiv.

3. Dat je pravougaonik $ABCD$. Simetrala dijagonale AC siječe stranicu AB u tački E, a stranicu CD u tački F, tako da je trougao EBC jednakokraki. Odrediti ugao $\angle DFE$.

   Rješenje: Neka je tačka M sredina dijagonale AC. Trouglovi AME i CME su podudarni (zajednička stranica EM, stranice AM i CM su jednake, $\angle AME = \angle EMC = 90°$, stav SUS), pa je trougao ACE jednakokraki. Kako je trougao EBC jednakokraki, i $\angle EBC = 90°$, to je $\angle BEC = 45°$. Uglovi $\angle CEA$ i $\angle BEC$ su suplementni, pa je $\angle CEA = 135°$. Iz ovoga slijedi da je $\angle EAC = \angle ACE = 22.5°$. Iz trougla AEM vidimo da je $\angle FEA = 77.5°$, a pošto su uglovi $\angle FEA$ i $\angle DFE$ suplementni, to je $\angle DFE = 112.5°$.



4. Da li tačno da se od 100 brojeva može izabrati 15, tako da razlika bilo koja dva broja od izabranih brojeva bude djeljiva sa 7? Kakav je odgovor ako se broj 15 zamijeni brojem 16?

   Rješenje: Primijetimo da je razlika dva broja djeljiva sa 7 ako i samo ako ti brojevi daju iste ostatke pri dijeljenju sa 7. Ostaci (mogući) pri dijeljenju sa 7 su 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6. Ako ne bismo mogli izabrati 15 brojeva sa traženim svojstvom, to znači da najviše 14 od njih daje ostatak 0, najviše 14 daje ostatak 1,..., najviše 14 njih daje ostatak 6. No tada bismo imali najviše $7 \cdot 14 = 98 < 100$. Dakle, moguće je izabrati 15 brojeva takvih da razlika bilo koja dva bude djeljiva sa 7.

Ako se broj 15 zamijeni brojem 16, tada je odgovor negativan. Recimo ako su dati brojevi 1, 2, 3,..., 100. Medju njima brojevi 7, 14, 21,...,98 (ima ih 14), pri dijeljenju sa 7 daju ostatak nula. Brojevi 1, 8, 15,..., 99 (njih je 15) daju ostatak 1, brojevi 2, 9, 16,..., 100 (njih je opet 15) daju ostatak 2; zatim brojevi 3, 10, 17,..., 94 (ima ih 14) daju ostatak 3. Slično imamo po 14 brojva koji daju ostatke 4, 5, 6. Dakle, ne možemo izdvojiti 16 brojeva, takvih da je razlika bilo koja dva djeljiva sa 7.

Vrijeme rada: 180 minuta.
Svaki zadatak se boduje od 0 do 25 poena.
Rješenja zadataka detaljno obrazložiti.