Prirodno-matematički fakultet

Društvo matematičara i fizičara Crne Gore

OLIMPIJADA ZNANJA 2017

Rješenja zadataka iz MATEMATIKE

za IX razred osnovne škole

1. Ribar je prodavao X kilograma ribe dva dana na pijaci sa sljedećim uspjehom.

    a) da je prodao 5kg ribe više nego što je ukupno (za oba dana) prodao, ostalo bi mu petina ribe koju je donio na prodaju;
    b) prvi dan je prodao dva kilograma više od dvije trećine prodane ribe po cijeni y eura;
    c) jedan kilogram su mu pojele mačke;
    d) drugi dan je prodao ostatak po cijeni α eura i tog dana zaradio $\frac{1}{y}$ puta manje novca nego prvi dan;

    Ako je na pijacu iznio cjelobrojnu količinu kilograma ribe i uvijek je prodavao za cjelobrojno eura po kilogramu, koliko je ribe mogao donijeti na prodaju?

Rješenje: Označimo sa x količinu ribe koju je ribar donio na prodaju i sa P količinu ribe koju je prodao. Na osnovu uslova zadatka pod a), važi

$$x-(P+5)=\frac{1}{5}x \quad \Longrightarrow \quad P=\frac{4}{5}x-5. \tag{1}$$

Neka je z zarada prvog dana. Na osnovu uslova b) i d), imamo dalje

$$\begin{aligned}(\frac{2}{3}P+2)y&=z\\(\frac{1}{3}P-3)\alpha&=\frac{z}{y}.\end{aligned}$$

Kombinujući ove dvije relacije s (1), dobijamo

$$\alpha=\frac{4x-10}{2x-35}=2+\frac{60}{2x-35}$$

odakle iz uslova cjelobrojnosti cijene i količine ribe slijedi da x može biti 18, 19, 20 ili 25. $\square$

2. Data je kvadratna ploča veličine $2017m \times 2017m$ i 2015 kvadratnih stubića dužine dijagonale $\frac{36}{2017}m$ koji su raspoređeni na toj ploči.

   a) Dokazati da u datoj ploči postoji bar jedan pravougaonik dimenzija $36m \times 56m$ u kom nije centar niti jednog od stubića.

   b) Dokazati da postoji bar jedan pravougaonik dimenzija $36m \times 56m$ u kom se ne nalazi ni jedan dio od datih 2015 stubića.

Rješenje: a) Ploču dimenzije $2016m \times 2016m$ možemo podijeliti na tačno 2016 pravougaonika dimenzija $36m \times 56m$. Kako je ploča $2016m \times 2016m$ sadržana u ploči $2017m \times 2017m$ to i ona sadrži 2016 takvih pravougaonika. Na osnovu Dirichletovog principa, bar jedan od tih 2016 pravougaonika neće sadržati centar jednog od 2015 datih stubića.

b) U ploču $2017m \times 2017m$ očigledno možemo smjestiti mrežu od 2016 pravougaonika dimenzija $\left(36 + \frac{36}{2017}\right) m \times \left(56 + \frac{36}{2017}\right) m$. Na osnovu Dirichletovog principa postoji pravougaonik P u kom nije centar ni jednog od datih stubića.Međutim, kako je dijagonala stubića $\frac{36}{2017}m$ tada u pravougaoniku P' dimenzija 36×56 koncentrično upisanog u pravougaonik P neće biti centar ni jednog od datih stubića.

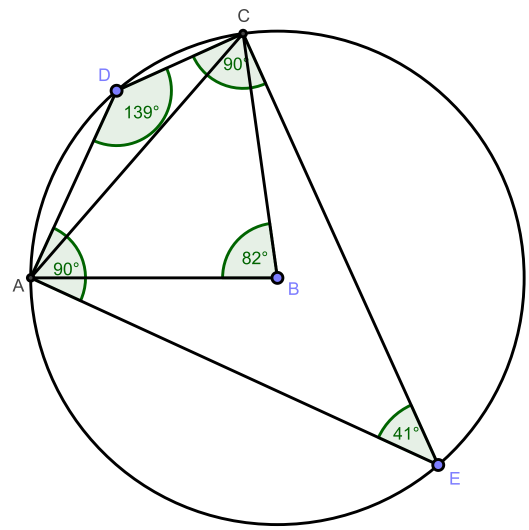
3. Dokazati da je bar jedan paran broj od četvorocifrenih brojeva dobijenih permutacijom cifara broja 2017 takav da nije jednak razlici kvadrata dva prirodna broja.

Rješenje: Posmatrajmo broj 1702. Ako bi važilo

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b) = 1702$$

tada su a i b iste parnosti (kako je 1702 paran). Odatle slijedi da su i $a-b$ i $a+b$ parni tj. $(a-b)(a+b)$ je djeljiv s 4 dok 1702 nije. Kontradikcija.

4. U četvorouglu $ABCD$ važi $AB = BC = 3$, $\angle ADC = 139^\circ$ i $\angle ABC = 82^\circ$. Dokazati da se normale iz tačaka A i C na duži AD i DC, respektivno, sijeku na krugu opisanom oko trougla ADC. Izračunati dužinu duži BD.



Rješenje: Neka se normale iz A i C na duži AD i DC, respektivno, sijeku u E. Četvorougao $ADCE$ je očigledno tetivan jer mu je zbir naspramnih uglova 180°. To je u stvari krug opisan oko trougla ACD (jer je krug određen jedinstveno s tri tačke).

Uočimo dalje kružnicu k s centrom u B poluprečnika 3. Ona prolazi kroz tačke A i C i siječe pravu DE u tačkama D' i D''. Kako je $\angle ABC = 82^\circ$ to je $\angle AD'C = 41^\circ$ i $\angle AD''C = 139^\circ$ (ili obratno u odnosu na D' i D''). Kako je po uslovu zadatka $\angle ADC = 139^\circ$, mora biti $D = D''$ odakle slijedi da je k kružnica opisana oko trougla ACD čiji je centar u B. Zato je $|BD| = 3$.

Vrijeme rada: 180 minuta.
Svaki zadatak se boduje od 0 do 25 poena.
Rješenja zadataka detaljno obrazložiti.